[Abi99]

Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto \frac{1}{(x+1)\cdot \ln(x+1)}$$

mit der größtmöglichen Definitionsmenge D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
Hinweis: $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} (x \cdot \ln x) = 0$ darf ohne Beweis verwendet werden.

1. a) Bestimmen Sie D_f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f. Geben Sie auch alle Asymptoten an. (6 BE)

   b) Bestätigen Sie: $f'(x) = -\frac{1+\ln(x+1)}{[(x+1)\cdot \ln(x+1)]^2}$
   Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage des Extrempunkts. (7 BE)

   c) Geben Sie die Gleichung der Tangente t im Punkt $\left(e-1 \middle| \frac{1}{e}\right)$ an. (3 BE)

   d) Zeichnen Sie G_f und die Tangente t unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1 < x < 4$ [Längeneinheit 2 cm]. (6 BE)

2. a) Begründen Sie allgemein, dass jede streng monotone Funktion umkehrbar ist. Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass jedoch nicht jede umkehrbare Funktion streng monoton ist. (4 BE)

   b) Die Einschränkung f^* von f auf $D^* = \mathbb{R}^+$ ist umkehrbar. Für die Umkehrfunktion g von f^* lässt sich kein Funktionsterm g(x) angeben. Geben Sie trotzdem $g\left(\frac{1}{e}\right)$ und $g'\left(\frac{1}{e}\right)$ an. (3 BE)

3. Nun wird für $k > 0$ die Schar der Integralfunktionen $J_k: x \mapsto \int\limits_k^x f(t)\,dt$ betrachtet.

   a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_k von J_k an. (1 BE)

   b) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von J_k. Änderung (*) (4 BE)

   c) Es gilt: $J_{e-1}(x) = \ln(\ln(x+1))$.
   Lösen Sie die Gleichung
   $-J_{e-1}(\sqrt{e}-1) = J_{e-1}(x)$
   nach x auf und deuten Sie Ihr Ergebnis anhand der Zeichnung aus Teilaufgabe 1d geometrisch. (6 BE)

   (40 BE)

Änderung(*): Zeigen Sie: $J_k(x) = \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(k+1))$

Lösung zum Abi 99:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$$

1. a) $\mathbb{D} =]-1;+\infty[\setminus\{0\}$ $\quad x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$\ln(x+1)\neq 0 \Rightarrow x+1\neq 1 \Rightarrow x\neq 0$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = "\frac{1}{0^-}" = -\infty$ siehe Hinweis; zu beachten: für $x \underset{>}{\to} -1$ gilt: $0 < x+1 < 1$;

also: $\ln(x+1) < 0$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = "\frac{1}{1\cdot 0^-}" = -\infty$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = "\frac{1}{1\cdot 0^+}" = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = "\frac{1}{\infty\cdot\infty}" = 0^+$

senkrechte Asymptoten: $x=-1;\quad x=0$

waagrechte Asymptote: $y=0$

b) $f'(x) = \frac{-\left[1\cdot\ln(x+1)+(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\right]}{[(x+1)\ln(x+1)]^2} = \frac{-[1+\ln(x+1)]}{[(x+1)\ln(x+1)]^2}$

$-[1+\ln(x+1)] < 0 \quad 1+\ln(x+1) > 0 \quad \ln(x+1) > -1 \quad x+1 > e^{-1} \quad x > \frac{1}{e}-1$

	$]-1;\frac{1}{e}-1[$	$]\frac{1}{e}-1;0[$	$]0;\infty[$
f'(x)	>0	<0	<0
f(x)	steigt	fällt	fällt

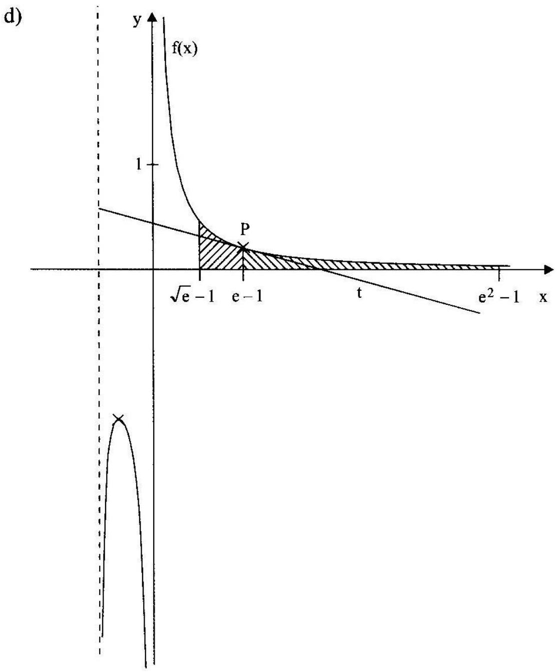
$\text{Max}\left(\frac{1}{e}-1 \,\middle|\, -e\right)$

c) $f'(e-1) = \frac{-[1+\ln e]}{[e\ln e]^2} = -\frac{2}{e^2}$

t: $\quad y = -\frac{2}{e^2}(x-e+1)+\frac{1}{e}$

$\quad y = -\frac{2}{e^2}x+\frac{3}{e}-\frac{2}{e^2}$

d)



2. a) Für eine streng monotone Funktion gilt

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (zunehmend) bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ (abnehmend)

d. h. auch die Zuordnung $f(x) \to x$ ist eindeutig.

siehe auch FS S. 48/49 1. und 2.a

mögliche Beispiele: 1. $f(x)=\frac{1}{x}$

2. gegebene Funktion mit $x > \frac{1}{e}-1$

b) $g\left(\frac{1}{e}\right) = e - 1$ siehe Punkt P in 1 c

ausführlich:
$$f(x_0) = \frac{1}{e}$$
$$(x_0 + 1)\ln(x_0 + 1) = e$$
$$\ln(x_0 + 1)^{x_0 + 1} = e$$
$$(x_0 + 1)^{x_0 + 1} = e^e$$
$$x_0 + 1 = e$$
$$x_0 = e - 1$$

$$g'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{e}\right)\right)} = \frac{1}{f'(e-1)} = \frac{1}{-\frac{2}{e^2}} = -\frac{e^2}{2}$$

3. a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ Integration über $x = 0$ hinaus nicht möglich!

b) $$\int \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)\cdot z}(x+1)\,dz = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| = \ln|\ln(x+1)|$$

Substitution: $z = \ln(x + 1)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad dx = (x+1)\,dz$$

$$\int_k^x \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)}\,dt = \left[\ln|\ln(t+1)|\right]_k^x = \ln|\ln(x+1)| - \ln|\ln(k+1)|$$
$$= \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(k+1) \qquad \text{da } x; k \in \mathbb{R}^+$$

c) $$-\ln(\ln\sqrt{e}) = \ln(\ln(x+1))$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \ln(\ln(x+1))$$
$$\ln 2 = \ln(\ln(x+1))$$
$$2 = \ln(x+1)$$
$$e^2 = x + 1$$
$$x = e^2 - 1$$

geometrische Deutung:

Die beiden Flächen $A_1 = \int_{\sqrt{e}-1}^{e-1} f(x)\,dx$ und $A_2 = \int_{e-1}^{e^2-1} f(x)\,dx$ sind gleich groß (s. 1d).