Lösungen zum Aufgabenblatt 2 zum elektrischen Feld

1. geg.: $v = 100\,\frac{km}{h} = 27{,}8\,\frac{m}{s}$; $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C$; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg$ ges.: U

$$\tfrac{1}{2} m_e v^2 = e \cdot U \;\Rightarrow\; U = \frac{m_e v^2}{2e} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot \left(27{,}8\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C} = 2{,}20 \cdot 10^{-9}\,\tfrac{J}{C} = 2{,}20\ nV$$

2. geg.: $U = 18\ kV$; $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C$; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg$; $s = 0{,}40\ m$ ges.: v, t

$$\tfrac{1}{2} m_e v^2 = eU \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{2eU}{m_e} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 18 \cdot 10^3\,V}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg}} = 8{,}0 \cdot 10^7\,\tfrac{m}{s} = 0{,}27 \cdot c$$

Dies ist also mehr als 10% der Lichtgeschwindigkeit. Hier ist die klassische Rechnung nicht mehr sinnvoll, da die relativistischen Effekte nicht mehr vernachlässigbar sind.
Der relativistische Ansatz ergibt:

$$W_{Beschl.} = E_{kin} = \Delta E \;\Rightarrow\; eU = (m - m_0) \cdot c^2 \text{ mit } m_0 = m_e \text{ (die Ruhemasse) und } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow\; eU + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 \cdot c^4}{\left(eU + m_0 c^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 \cdot c^4}{e^2U^2 + 2eUm_0c^2 + m_0^2c^4} = \frac{e^2U^2 + 2eUm_0c^2}{\left(eU + m_0c^2\right)^2} \;\Leftrightarrow\; v^2 = \frac{eU \cdot c^2 \cdot \left(eU + 2m_0c^2\right)}{\left(eU + m_0c^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{c \cdot \sqrt{eU \cdot \left(eU + 2m_0c^2\right)}}{eU + m_0c^2}$$

$$= \frac{3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{m}{s} \cdot \sqrt{1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 18 \cdot 10^3\,V \cdot \left(1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 18 \cdot 10^3\,V + 2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}\right)^2\right)}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 18 \cdot 10^3\,V + 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}\right)^2} = 7{,}75 \cdot 10^7\,\tfrac{m}{s}$$

Damit folgt für die Zeit bis zum Bildschirm: $v = \frac{s}{t} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}40\ m}{7{,}75 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}} = 5{,}2 \cdot 10^{-9}\,s = 5{,}2\,ns$

3. Der Abstand Kathode-Anode spielt in beiden Fällen keine Rolle. v hängt nur von U ab.
   a) Bei 300 V kann noch klassisch gearbeitet werden. Wie in 2. folgt:

$$\tfrac{1}{2} m_e v^2 = e \cdot U \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{2 \cdot e \cdot U}{m_e} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 300\,V}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg}} = 1{,}0 \cdot 10^7\,\tfrac{m}{s}$$

   b) Klassisch folgt mit derselben Rechnung: $v = 8{,}4 \cdot 10^7\,\frac{m}{s} = 0{,}28 \cdot c$

   Richtig ist es relativistisch mit derselben Rechnung wie in 2.: $v = 8{,}2 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$

4. a) Auch bei 1000 V ergibt sich bei der klassischen Rechnung noch ein Wert unter 10% von c, so daß also klassisch gearbeitet werden kann. Mit derselben Rechnung wie oben (aber alle Werte mit 4 geltenden Ziffern) bekommt man: $v = 1{,}876 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$

   b) geg.: $v = 1{,}876 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$, s = 4,0 cm = 0,040 m ges.: t

$$V = \frac{s}{t} \;\Rightarrow\; t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}040\,m}{1{,}876 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}} = 2{,}1 \cdot 10^{-9}\,s = 2{,}1\ ns$$

   c) geg.: d = 1,0 cm = 0,010 m, U_K= 50 V ges.: E

$$E = \frac{U}{d} = \frac{50\,V}{0{,}010\,m} = 5{,}0 \cdot 10^3\,\tfrac{V}{m} = 5{,}0\,\tfrac{kV}{m}$$

   d) geg.: $E = 5{,}0 \cdot 10^3\,\frac{V}{m}$, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$ ges.: F

$$F = e \cdot E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 5{,}0 \cdot 10^3\,\tfrac{V}{m} = 8{,}0 \cdot 10^{-16}\,\tfrac{As \cdot V}{m} = 8{,}0 \cdot 10^{-16}\,\tfrac{J}{m} = 8{,}0 \cdot 10^{-16}\,\tfrac{Nm}{m} = 8{,}0 \cdot 10^{-16}\,N$$

   e) geg.: $F = 8{,}0 \cdot 10^{-16}\,N$, $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg$ ges.: a

$$F = m \cdot a \;\Rightarrow\; a = \frac{F}{m_e} = \frac{8{,}0 \cdot 10^{-16}\,N}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg} = 8{,}8 \cdot 10^{14}\,\frac{m}{s^2}$$

f) geg.: $a = 8{,}8 \cdot 10^{14}\,\frac{m}{s^2}$, $t = 2{,}1 \cdot 10^{-9}\,s$ ges.: s_v

$$s_v = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}8 \cdot 10^{14}\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(2{,}1 \cdot 10^{-9}\,s\right)^2 = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\,m = 1{,}9\,mm$$

g) geg.: $a = 8{,}8 \cdot 10^{14}\,\frac{m}{s^2}$, $t = 2{,}1 \cdot 10^{-9}\,s$ ges.: v_v

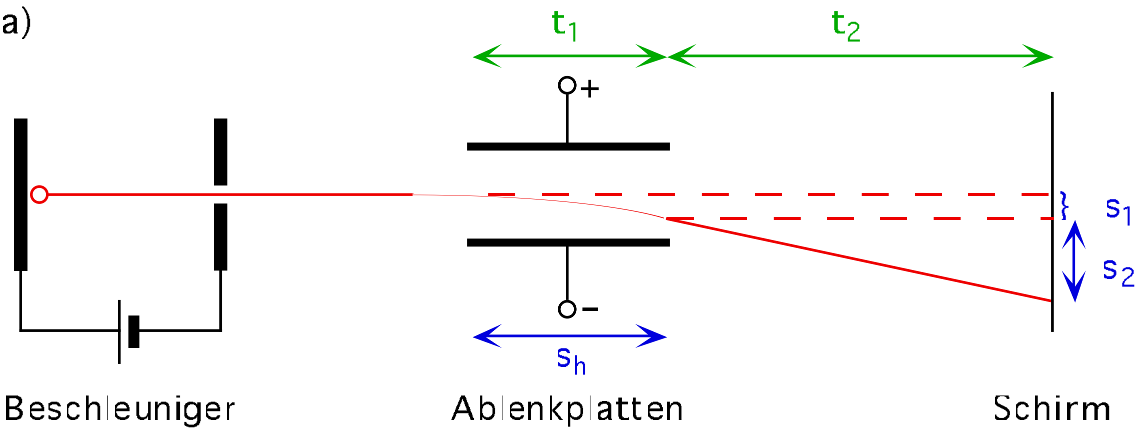
$$v_v = a \cdot t = 8{,}8 \cdot 10^{14}\,\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-9}\,s = 1{,}8 \cdot 10^{6}\,\tfrac{m}{s}$$

h) geg.: $s_h = 30\,cm = 0{,}30\,m$, $v_h = 1{,}876 \cdot 10^{7}\,\tfrac{m}{s}$, $v_v = 1{,}8 \cdot 10^{6}\,\tfrac{m}{s}$ ges.: s_v

$$\left.\begin{aligned} v_h &= \frac{s_h}{t} \;\Rightarrow\; t = \frac{s_h}{v_h} \\ v_v &= \frac{s_v}{t} \;\Rightarrow\; s_v = v_v \cdot t \end{aligned}\right\} \Rightarrow\; s_v = v_v \cdot \frac{s_h}{v_h} = 1{,}8 \cdot 10^{6}\,\tfrac{m}{s} \cdot \frac{0{,}30\,m}{1{,}876 \cdot 10^{7}\,\tfrac{m}{s}} = 0{,}029\,m = 2{,}9\,cm$$

Die gesamte Ablenkung ist die zwischen den Platten plus die danach:
2,8 cm + 1,9 mm = 3,0 cm

5. a)



b) Obwohl die Spannung sehr hoch ist, kann klassisch gearbeitet werden (wie die folgende Rechnung zeigen wird), da die Masse der Teilchen relativ groß ist.

geg.: $U_B = 1{,}8 \cdot 10^{4}\,V$, $Q_p = Q_{He} = e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C$, $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\,kg$

$m_{He^+} = m_\alpha + m_e = 6{,}6447 \cdot 10^{-27}\,kg + 9{,}1095 \cdot 10^{-31}\,kg = 6{,}6456 \cdot 10^{-27}\,kg$

ges.: v_h

$$v_h = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m}} \quad \text{(vgl. 2.)}$$

Proton:

$$v_h = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1{,}8 \cdot 10^{4}\,V}{1{,}6726 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 1{,}857 \cdot 10^{6}\,\tfrac{m}{s}$$

Helium:

$$v_h = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1{,}8 \cdot 10^{4}\,V}{6{,}6456 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 9{,}316 \cdot 10^{5}\,\tfrac{m}{s}$$

c) i) im Kondensator:

geg.: $s_h = 5{,}0\,cm = 0{,}050\,m$, $d = 1{,}5\,cm = 0{,}015\,m$, $U_K = 400\,V$ ges.: s_1

$$E = \frac{U_K}{d} = \frac{400\,V}{0{,}015\,m} = 2{,}\overline{6} \cdot 10^{4}\,\tfrac{V}{m}$$

$$F = e \cdot E = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 2{,}\overline{6} \cdot 10^{4}\,\tfrac{V}{m} = 4{,}27 \cdot 10^{-15}\,N \approx 4{,}3 \cdot 10^{-15}\,N$$

$a = \frac{F}{m}$ Proton: $a = \frac{4{,}27 \cdot 10^{-15}\,N}{1{,}6726 \cdot 10^{-27}\,kg} = 2{,}55 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2} \approx 2{,}6 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}$

Helium: $a = \frac{4{,}27 \cdot 10^{-15}\,N}{6{,}6456 \cdot 10^{-27}\,kg} = 6{,}43 \cdot 10^{11}\,\frac{m}{s^2} \approx 6{,}4 \cdot 10^{11}\,\frac{m}{s^2}$

$v_h = \frac{s_h}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{s_h}{v_h}$ Proton: $t_1 = \frac{0{,}050\,m}{1{,}857 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}} = 2{,}69 \cdot 10^{-8}\,s \approx 27\ ns$

Helium: $t_1 = \frac{0{,}050\,m}{9{,}316 \cdot 10^5\,\frac{m}{s}} = 5{,}37 \cdot 10^{-8}\,s \approx 54\ ns$

$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2$ Proton:

$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}55 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(2{,}69 \cdot 10^{-8}\,s\right)^2 = 9{,}23 \cdot 10^{-4}\,m \approx 0{,}92\,mm$

Helium:

$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}43 \cdot 10^{11}\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(5{,}37 \cdot 10^{-8}\,s\right)^2 = 9{,}27 \cdot 10^{-4}\,m \approx 0{,}93\,mm$

ii) außerhalb des Kondensators:

$v_v = a \cdot t_1$ Proton: $v_v = 2{,}55 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}69 \cdot 10^{-8}\,s = 6{,}86 \cdot 10^4\,\frac{m}{s} \approx 6{,}9 \cdot 10^4\,\frac{m}{s}$

Helium: $v_v = 6{,}43 \cdot 10^{11}\,\frac{m}{s^2} \cdot 5{,}37 \cdot 10^{-8}\,s = 3{,}45 \cdot 10^4\,\frac{m}{s} \approx 3{,}5 \cdot 10^4\,\frac{m}{s}$

$t_2 = 5 \cdot t_1$ (da horizontal die 5-fache Strecke zurückgelegt wird und $v_h = \text{const.}$)

Proton: $t_2 = 5 \cdot 2{,}69 \cdot 10^{-8}\,s = 1{,}345 \cdot 10^{-7}\,s \approx 1{,}3 \cdot 10^{-7}\,s$

Helium: $t_2 = 5 \cdot 5{,}37 \cdot 10^{-8}\,s = 2{,}685 \cdot 10^{-7}\,s \approx 2{,}7 \cdot 10^{-7}\,s$

$v_v = \frac{s_2}{t_2} \Rightarrow s_2 = v_v \cdot t_2$ Proton: $s_2 = 6{,}86 \cdot 10^4\,\frac{m}{s} \cdot 1{,}345 \cdot 10^{-7}\,s = 9{,}23 \cdot 10^{-3}\,m \approx 9{,}2\,mm$

Helium: $s_2 = 3{,}45 \cdot 10^4\,\frac{m}{s} \cdot 2{,}685 \cdot 10^{-7}\,s = 9{,}26 \cdot 10^{-3}\,m \approx 9{,}3\,mm$

$s = s_1 + s_2$ Proton: $s = 9{,}23 \cdot 10^{-4}\,m + 9{,}23 \cdot 10^{-3}\,m = 0{,}010\,m = 1{,}0\,cm$

Helium: $s = 9{,}27 \cdot 10^{-4}\,m + 9{,}26 \cdot 10^{-3}\,m = 0{,}010\,m = 1{,}0\,cm$

Diese Methode eignet sich nicht zur Unterscheidung der Teilchen, da die Ablenkung bei beiden gleich ist. Zwar ist die Beschleunigung der Heliumionen im Kondensator kleiner, aber dafür sind sie länger der beschleunigenden Kraft ausgesetzt.

Ergänzung:
Die Aufgabe 5 könnte auch ohne Zahlenwerte gestellt werden, so dass man allgemein nur mit Formeln zeigen müsste, dass die Ablenkung gleich ist.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{e \cdot U_K}{m \cdot d} \ ; \quad t_1 = \frac{s_h}{v_h} \ ; \quad v_h^2 = \frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m}$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U_K}{m \cdot d} \cdot \left(\frac{s_h}{v_h}\right)^2 = \frac{e \cdot U_K \cdot s_h^2}{2 \cdot m \cdot d \cdot v_h^2} = \frac{e \cdot U_K \cdot s_h^2 \cdot m}{2 \cdot m \cdot d \cdot 2 \cdot e \cdot U_B} = \frac{U_K \cdot s_h^2}{4 \cdot d \cdot U_B}$$

$$s_2 = v_v \cdot t_2 = (a \cdot t_1) \cdot (5 \cdot t_1) = 5 \cdot a \cdot t_1^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2\right) = 10 \cdot s_1 \quad \Rightarrow \quad s = s_1 + s_2 = 11 \cdot s_1 = \frac{11 \cdot U_K \cdot s_h^2}{4 \cdot d \cdot U_B}$$

Dieser Ausdruck ergibt für beide Teilchenarten dieselbe Ablenkung, da der einzige Unterschied, ihre Masse, sich herauskürzt. Ihr Einfluss auf die Beschleunigung hält ihrem Einfluss bei der Ablenkung die Waage.